پیوست الف
حاصل‌جمع

وقتی الگوریتمی شامل ساختار کنترل تکراری مثل حلقه while یا for است، زمان اجرای آن می‌تواند بر اساس مجموع (حاصل‌جمع) زمان‌های مصرف‌شده در هر اجرای بدنه حلقه بیان شود. به عنوان مثال، در بخش ۲-۲ دیدیم که j اُمین تکرار مرتب‌سازی درج، در بدترین حالت به زمان متناسب با j نیاز دارد. با جمع‌کردن زمان مصرف‌شده در هر تکرار، حاصل‌جمع زیر را به دست می‌آوریم:

$$\sum_{j=2}^{n} j$$

ارزیابی این مجموع، در بدترین حالت زمان اجرای الگوریتم، منجر به کران $\Theta(n^2)$ می‌شود. این مثال اهمیت درک چگونگی دستکاری و محدودکردن مجموع را نشان می‌دهد.

بخش الف – ۱ چندین فرمول اساسیِ حاوی حاصل‌جمع‌ها را نشان می‌دهد. بخش الف – ۲ تکنیک‌های مفیدی را برای محدودکردن حاصل‌جمع‌ها ارائه می‌کند. فرمول‌ها در بخش الف – ۱، بدون اثبات ارائه می‌شوند، گرچه اثبات بعضی از آن‌ها در بخش الف – ۲ ارائه شد تا روش‌های آن بخش را شرح دهد.

الف–۱ خواص و فرمول‌های حاصل‌جمع‌ها

با توجه به دنباله $a_1, a_2, \ldots$ از اعداد، مجموع متناهی $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$، که در آن n صحیح نامنفی است، می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

اگر $n = 0$ ، مقدار حاصل‌جمع، صفر تعریف می‌شود. مقدار سری‌های متناهی، همیشه خوش‌تعریف است، و جملات آن می‌توانند به هر ترتیبی جمع شوند.

با توجه به دنباله $a_1, a_2, \ldots$ از اعداد، مجموع نامتناهی $a_1 + a_2 + \ldots$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

که به صورت زیر تفسیر می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

اگر کران وجود نداشته باشد، سری‌ها **واگرا**[1] هستند، وگرنه همگرا[2] هستند. جملات سری‌های همگرا همیشه نمی‌توانند به هر ترتیبی جمع شوند. اما، می‌توان جملات **سری‌های همگرای مطلق**، یعنی سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ را، که برای آن سری‌های $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ نیز همگرا است، جمع کرد.

خطی‌بودن

برای هر عدد حقیقی c و هر دنباله $a_1,a_2,...,a_n$ و $b_1,b_2,...,b_n$ ، داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}(ca_k + b_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

خاصیت خطی‌بودن نیز از سری‌های همگرای نامتناهی پیروی می‌کند.

خاصیت خطی‌بودن می‌تواند برای دستکاری حاصل‌جمع‌های موجود در نمادگذاری مجانبی استفاده شود. مثال زیر را ببینید:

$$\sum_{k=1}^{n}\Theta(f(k)) = \Theta\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)$$

در این معادله، نماد Θ در سمت چپ، به متغیر k ، ولی در سمت راست به n اِعمال می‌شود. این نوع دستکاری می‌تواند به سری‌های همگرای نامتناهی نیز اِعمال شود.

سری‌های حسابی

حاصل‌جمع زیر را درنظربگیرید:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$$

این سری، یک **سری حسابی** است و مقدارش به صورت زیر است:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad \text{(الف-۱)}$$

$$= \Theta(n^2) \qquad \text{(الف-۲)}$$

مجموع مربعات و مکعبات

مجموع مربعات و مکعبات زیر را داریم:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{(الف-۳)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \text{(الف-۴)}$$

سری‌های هندسی

برای عدد حقیقی $x \neq 1$ ، حاصل‌جمع زیر را درنظربگیرید:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

1. diverge 2. converge

این حاصل‌جمع، **سری هندسی** یا **سری نمایی** است و مقدار آن برابر است با:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad \textbf{(الف–۵)}$$

وقتی مجموع، نامتناهی باشد و $|x| < 1$ ، سری نزولی نامتناهی زیر را داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \textbf{(الف–۶)}$$

سری‌های هارمونیک

برای مقادیر صحیح مثبت n ، **عدد هارمونیک**[1] nاُم برابر است با:

$$\begin{aligned} H_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \ln n + O(1) \end{aligned} \qquad \textbf{(الف–۷)}$$

(این فرمول را در بخش الف – ۲ اثبات خواهیم کرد).

سری‌های انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری

فرمول‌های دیگری می‌تواند از طریق انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از فرمول‌های فوق به دست آید. به عنوان مثال، با مشتق‌گیری از طرفین سری‌های هندسی نامتناهی (الف –۶) و ضرب در x ، خواهیم داشت:

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \textbf{(الف–۸)}$$

سری ادغامی

برای هر دنباله $a_0, a_1, \ldots, a_n$ داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 \qquad \textbf{(الف–۹)}$$

زیرا هر جمله $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ دقیقاً یک بار اضافه و یک بار تفریق می‌شود. می‌گوییم، این مجموع، ادغامی است. به طور مشابه، داریم:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n$$

به عنوان مثالی از مجموع ادغامی، سری زیر را درنظربگیرید:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}$$

چون هر جمله را به صورت زیر بازنویسی کردیم:

---

1. harmonic number

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

حاصلضرب‌ها

حاصلضرب متناهی $a_1 a_2 \dots a_n$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k$$

اگر $n = 0$ ، مقدار حاصلضرب، یک تعریف می‌شود. می‌توان فرمول حاوی ضرب را با استفاده از خاصیت همانی زیر، به حاصل‌جمع (مجموع) تبدیل کرد:

$$\lg\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lg a_k$$

تمرین‌های بخش الف – ۱

تمرین الف–۱–۱: فرمول ساده‌ای برای $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ بیابید.

★ **تمرین الف–۱–۲:** نشان دهید که $\sum_{k=1}^{n} 1/(2k-1) = \ln(\sqrt{n}) + O(1)$. برای این کار، سری هارمونیک را دستکاری کنید.

تمرین الف–۱–۳: برای $0 < |x| < 1$ ، نشان دهید که $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = x(1+x)/(1-x)^3$.

★ **تمرین الف–۱–۴:** نشان دهید که $\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)/2^k = 0$.

★ **تمرین الف–۱–۵:** مجموع $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)x^{2k}$ را ارزیابی کنید.

تمرین الف–۱–۶: با استفاده از خاصیت خطی‌بودن حاصل‌جمع، ثابت کنید $\sum_{k=1}^{n} O(f_k(n)) = O\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(n)\right)$.

تمرین الف–۱–۷: حاصلضرب $\prod_{k=1}^{n} 2 \cdot 4^k$ را ارزیابی کنید.

★ **تمرین الف–۱–۸:** حاصلضرب $\prod_{k=2}^{n}(1 - 1/k^2)$ را ارزیابی کنید.

الف–۲ محدودکردن حاصل‌جمع‌ها

تکنیک‌های مختلفی برای محدودکردن[1] حاصل‌جمع‌هایی که زمان‌های اجرای الگوریتم‌ها را توصیف می‌کنند، وجود دارد.

استقرای ریاضی

اصلی‌ترین روش ارزیابی سری، استفاده از استقرای ریاضی است. به عنوان مثال، ثابت می‌کنیم که سری حسابی $\sum_{k=1}^{n} k$ ، به $\frac{1}{2}n(n+1)$ ارزیابی می‌شود. این فرمول را به آسانی برای $n = 1$ بررسی می‌کنیم، و سپس فرض استقرا می‌سازیم که بیان می‌کند برای n برقرار است و ثابت می‌کنیم برای $n + 1$ نیز برقرار است. داریم:

1. bounding

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)\\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

به منظور استفاده از استقرای ریاضی، لازم نیست مقدار دقیق حاصل‌جمع را حدس بزنیم. استقرا می‌تواند برای نشان‌دادن کران‌ها نیز به کار رود. به عنوان مثال، نشان می‌دهیم که سری هندسی $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ برابر است با $O(3^n)$. به طور خاص، برای ثابت c ، اثبات می‌کنیم که $\sum_{k=0}^{n} 3^k \le c3^n$. برای شرط اولیه $n = 0$ تا زمانی که $c \ge 1$ است، داریم $\sum_{k=0}^{0} 3^k = 1 \le c$. با فرض این‌که این کران‌ها برای n برقرار است، ثابت می‌کنیم برای $n + 1$ برقرار است. تا زمانی که $(1/3+1/c) \le 1$ یا معادل آن، $c \ge 3/2$، داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} 3^k &= \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1}\\ &\le c3^n + 3^{n+1}\\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right) c3^{n+1}\\ &\le c3^{n+1}\end{aligned}$$

وقتی از نمادگذاری مجانبی برای اثبات کران‌ها از طریق استقرا استفاده می‌کنیم، باید دقت کافی به خرج دهیم. اثبات نادرست $\sum_{k=1}^{n} k = O(n)$ را که در زیر آمده است درنظربگیرید. یقیناً، $\sum_{k=1}^{1} k = O(1)$. با توجه به کران مربوط به n ، آن را برای $n + 1$ اثبات می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\\ &= O(n) + (n+1) \qquad \Longleftarrow \text{!!نادرست}\\ &= O(n+1)\end{aligned}$$

اشکال این‌است‌که "ثابت" مخفی‌شده در نمادگذاری "O بزرگ"، با n رشد می‌کند ودر نتیجه، ثابت نیست. نشان ندادیم که آن ثابت برای تمام *n ها* کار می‌کند.

محدودکردن جملات

گاهی، کران بالای خوب مربوط به سری، می‌تواند با محدودکردن هر جمله‌ی سری به دست آید، و معمولاً محدودکردن بزرگ‌ترین جمله برای محدودکردن بقیه کافی است. به عنوان مثال، کران بالای سریع روی سری حسابی (الف– ۱)، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &\le \sum_{k=1}^{n} n\\ &= n^2\end{aligned}$$

به طور کلی، برای سری $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ، اگر قرار دهیم $a_{max} = \max_{1\le k\le n} a_k$ ، آنگاه داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \le n a_{\max}$$

وقتی سری بتواند توسط یک سری هندسی محدود شود، تکنیک محدودکردن هر جمله‌ی سری توسط بزرگ‌ترین جمله، روش ضعیفی است. با توجه به سری $\sum_{k=0}^{n} a_k$، فرض کنید برای تمام $k \geq 0$ داریم $a_{k+1}/a_k \leq r$، که در آن $0 < r < 1$ ثابت است. این مجموع می‌تواند توسط سری هندسی نزولی نامتناهی محدود شود، زیرا $a_k \leq a_0 r^k$، و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k &\leq \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k \\ &= a_0 \frac{1}{1-r}\end{aligned}$$

می‌توان این روش را برای محدودکردن مجموع $\sum_{k=1}^{\infty}(k/3^k)$ استفاده کرد. به منظور شروع مجموع در $k = 0$، آن را به صورت $\sum_{k=0}^{\infty}((k+1)/3^{k+1})$ بازنویسی می‌کنیم. جمله اول (a_0) برابر 1/3 است، و نسبت (r) جملات متوالی، برای $k \geq 0$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\frac{(k+2)/3^{k+2}}{(k+1)/3^{k+1}} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{k+2}{k+1} \\ &\leq \frac{2}{3}\end{aligned}$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^{k+1}} \\ &\leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-2/3} \\ &= 1\end{aligned}$$

اشکال متداول در این روش، نشان‌دادن این نکته است که نسبت جملات متوالی کمتر از ۱ است و سپس فرض کرد که مجموع توسط سری هندسی محدود می‌شود. نمونه‌ای از آن، سری هارمونیک نامتناهی است، که واگرا است، زیرا داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \Theta(\lg n) \\ &= \infty\end{aligned}$$

نسبت $(k+1)$ اُمین و k اُمین جمله در این سری، برابر با $k/(k+1) < 1$ است، اما این سری توسط سری هندسی نزولی محدود نمی‌شود. برای محدودکردن یک سری توسط سری هندسی، باید نشان دهیم که یک $r < 1$ وجود دارد، که ثابت است، به طوری که نسبت تمام جفت‌های جملات متوالی هرگز از r بیشتر نیست. در سری هارمونیک، چنین r وجود ندارد، زیرا نسبت خیلی به ۱ نزدیک می‌شود.

افراز حاصل‌جمع‌ها[1]

یک روش به دست آوردن کران‌ها روی حاصل‌جمع‌های دشوار، بیان سری به صورت مجموع دو یا چند سری از طریق افراز بازه‌ی اندیس و سپس محدودکردن هر سری حاصل است. به عنوان مثال، فرض کنید سعی می‌کنیم کران پایینی روی سری حسابی $\sum_{k=1}^{n} k$ پیدا کنیم، که قبلاً نشان داده شد که کران بالای آن n^2 است. ممکن‌است سعی کنیم هر جمله در حاصل‌جمع را توسط کوچک‌ترین جمله محدود کنیم، اما چون آن جمله یک است، کران پایینی روی n را برای حاصل‌جمع به دست می‌آوریم، که خیلی دور از کران بالای n^2 است.

اگر ابتدا حاصل‌جمع را افراز کنیم، کران پایین بهتری را می‌توانیم به دست آوریم. برای سهولت فرض کنید که n زوج است. چون داریم $\sum_{k=1}^{n} k = O(n^2)$، کران زیر، کران تنگ (دقیق) مجانبی است:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n/2} k + \sum_{k=n/2+1}^{n} k \\
&\geq \sum_{k=1}^{n/2} 0 + \sum_{k=n/2+1}^{n} (n/2) \\
&= (n/2)^2 \\
&= \Omega(n^2)
\end{aligned}
$$

برای حاصل‌جمعی که از تحلیل الگوریتم به دست می‌آید، معمولاً، حاصل‌جمع را افراز می‌کنیم و تعداد ثابتی از جملات اولیه را درنظرنمی‌گیریم. معمولاً این تکنیک وقتی اِعمال می‌شود که هر جمله a_k در حاصل‌جمع $\sum_{k=0}^{n} a_k$ ، مستقل از n باشد. سپس برای هر ثابت $k_0 > 0$، می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} a_k \\
&= \Theta(1) + \sum_{k=k_0}^{n} a_k
\end{aligned}
$$

زیرا تمام جملات اولیه این حاصل‌جمع، ثابت‌اند و تعداد آن‌ها نیز ثابت است. سپس با استفاده از روش‌های دیگر می‌توان $\sum_{k=k_0}^{n} a_k$ را محدود کرد. این تکنیک به حاصل‌جمع‌های نامتناهی نیز اِعمال می‌شود. به عنوان مثال، برای یافتن کران بالای مجانبی روی حاصل‌جمع زیر:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

مشاهده می‌شود که اگر $k \geq 3$ باشد، نسبت جملات متوالی عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
\frac{(k+1)^2/2^{k+1}}{k^2/2^k} &= \frac{(k+1)^2}{2k^2} \\
&\leq \frac{8}{9}
\end{aligned}
$$

بنابراین، حاصل‌جمع می‌تواند به صورت زیر افراز شود:

1. splitting summations

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{2^k} &= \sum_{k=0}^{2}\frac{k^2}{2^k}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}\\ &\le \sum_{k=0}^{2}\frac{k^2}{2^k}+\frac{9}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^k\\ &= O(1)\end{aligned}$$

زیرا اولین حاصل‌جمع دارای تعداد جملات ثابتی است و حاصل‌جمع دوم یک سری هندسی نزولی است.

تکنیک افراز حاصل‌جمع می‌تواند برای تعیین کران‌های مجانبی در وضعیت‌های دشوارتر به کار رود. به عنوان مثال، می‌توان کران $O(\lg n)$ را روی سری هارمونیک به دست آورد (الف – ۷):

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

ایده، افراز بازه‌ی 1 تا n به $\lfloor \lg n\rfloor+1$ تکه و تعیین کران بالای هر تکه با مقدار ۱ است. هر تکه شامل جملاتی است که در $1/2^i$ شروع می‌شود و به سمت بالا می‌رود، و $1/2^{i+1}$ را دربرنمی‌گیرد، و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &\le \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n\rfloor}\sum_{j=0}^{2^i-1}\frac{1}{2^i+j}\\ &\le \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n\rfloor}\sum_{j=0}^{2^i-1}\frac{1}{2^i}\\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n\rfloor}1\\ &\le \lg n+1\end{aligned} \qquad \text{(الف–۱۰)}$$

تقریب (تخمین) انتگرال‌ها

وقتی حاصل‌جمع بتواند به صورت $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ بیان شود که f(k) تابع یکنواخت صعودی باشد، می‌توان آن را با انتگرال تخمین زد:

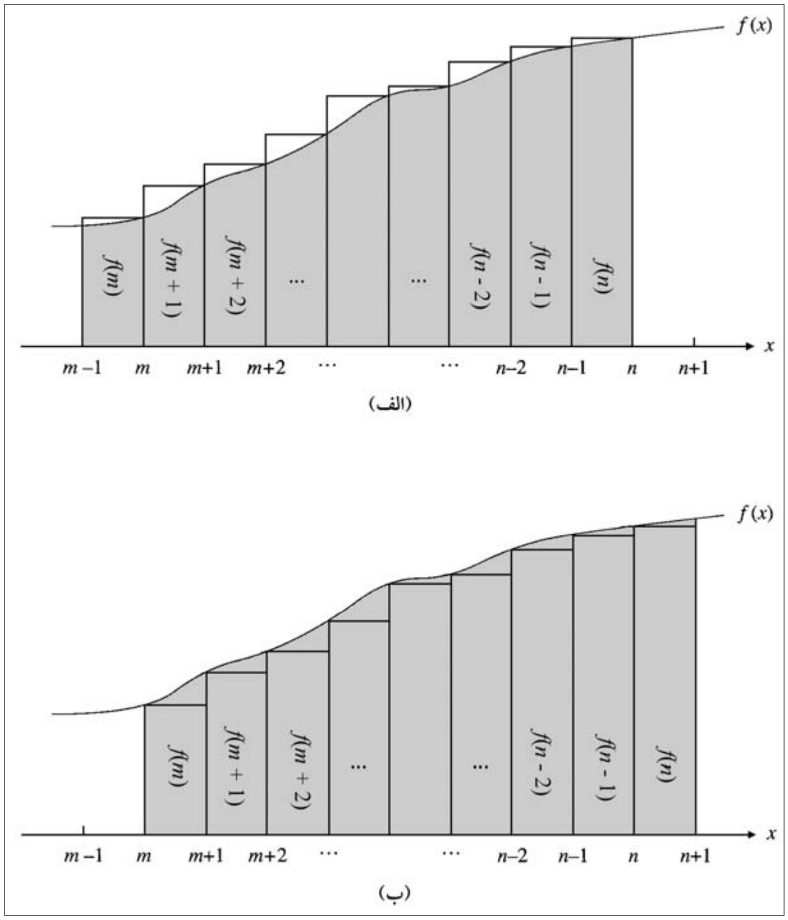
$$\int_{m-1}^{n} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)\,dx \qquad \text{(الف–۱۱)}$$

این تقریب در شکل الف–۱ توجیه شده است. حاصل‌جمع به صورت مساحت مستطیل‌ها در شکل نمایش داده می‌شوند، و انتگرال، ناحیه سایه‌دار زیر منحنی است. وقتی f(k) تابع یکنواخت نزولی است، می‌توان از روش مشابهی برای تعیین کران‌های استفاده کرد:

$$\int_{m}^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m-1}^{n} f(x)\,dx \qquad \text{(الف–۱۲)}$$

تقریب انتگرال (الف–۱۲)، تخمین دقیقی را برای n اُمین عدد هارمونیک ارائه می‌دهد. برای کران پایین، داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &\ge \int_{1}^{n+1}\frac{dx}{x}\\ &= \ln(n+1)\end{aligned} \qquad \text{(الف–۱۳)}$$



شکل الف – ۱ تقریب $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ به وسیله انتگرال. مساحت هر مستطیل در داخل مستطیل نشان داده شده است، و کل مساحت مستطیل، مقدار حاصل‌جمع را نشان می‌دهد. انتگرال توسط ناحیه سایه‌دار زیر منحنی نشان داده شده است. با مقایسه مساحت‌ها در (الف)، خواهیم داشت $\int_{m-1}^{n} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k)$ و سپس با انتقال مستطیل به اندازه یک واحد به سمت راست، در (ب) خواهیم داشت $\sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)\,dx$.

برای کران بالا، نامساوی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} &\le \int_{1}^{n} \frac{dx}{x}\\ &= \ln n\end{aligned}$$

که کران زیر را ارائه می‌دهد:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \ln n + 1 \qquad \text{(الف–۱۴)}$$

تمرین‌های بخش الف – ۲

تمرین الف-۲-۱: نشان دهید که $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$ با یک ثابت، از بالا محدود شد.

تمرین الف-۲-۲: کران بالای مجانبی را روی حاصل‌جمع زیر به دست آورید:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil n/2^k \rceil$$

تمرین الف-۲-۳: از طریق افراز حاصل‌جمع، نشان دهید که عدد n اُم هارمونیک برابر است با $\Omega(\lg n)$.

تمرین الف-۲-۴: تقریب $\sum_{k=1}^{n} k^3$ را با انتگرال به دست آورید.

تمرین الف-۲-۵: چرا برای به دست آوردن کران بالا روی n اُمین عدد هارمونیک از تقریب انتگرال (الف-۲) به طور مستقیم روی $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ استفاده نمی‌کنیم؟

الف-۳ مسئله‌ها

مسئله الف-۱: **تعیین کران‌های حاصل‌جمع.**

کران‌های دقیق مجانبی را برای حاصل‌جمع‌های زیر مشخص کنید. فرض کنید $r \geq 0$ و $s \geq 0$ ثابت‌اند.

الف. $\sum_{k=1}^{n} k^r$

ب. $\sum_{k=1}^{n} \lg^s k$

پ. $\sum_{k=1}^{n} k^r \lg^s k$