پیوست ب مجموعه‌ها و غیره

بسیاری از فصل‌های این کتاب، با موضوعات ریاضیات گسسته سروکار داشتند. این فصل، نمادگذاری‌ها، تعریف‌ها، و خواص اساسی مجموعه‌ها، رابطه‌ها، توابع، گراف‌ها، و درخت‌ها را به طور کامل مرور می‌کند.

ب–۱ مجموعه‌ها

مجموعه، کلکسیونی از اشیای متمایز، به نام **اعضا** یا **عناصر** است. اگر شیء x عضو مجموعه S باشد، می‌نویسیم $x \in S$، و اگر x عضو S نباشد، می‌نویسیم $x \notin S$. به عنوان مثال، می‌توان مجموعه S را طوری تعریف کرد که دقیقاً شامل اعداد ۱، ۲، و ۳ باشد. برای این کار می‌نویسیم $S = \{1, 2, 3\}$. چون ۲ عضو S است، می‌نویسیم $2 \in S$ و چون ۴ عضو S نیست، می‌نویسیم $4 \notin S$. مجموعه نمی‌تواند شامل اعضای تکرار باشد، و اعضای آن فاقد ترتیب‌اند. اگر دو مجموعه A و B عناصر یکسانی داشته باشند، می‌گوییم این دو مجموعه مساوی‌اند و می‌نویسیم $A = B$. به عنوان مثال $\{1, 2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$.

نمادگذاری‌های خاصی را برای مجموعه‌های متداول ارائه می‌کنیم:

- $\varnothing$، **مجموعه تهی** است، یعنی فاقد عنصر است.
- $\mathbf{Z}$ نشان‌دهنده **مجموعه صحیح** است، یعنی $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbf{R}$ نشان‌دهنده **مجموعه اعداد حقیقی** است.
- $\mathbf{N}$ نشان‌دهنده **اعداد طبیعی** است، یعنی مجموعه $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

اگر تمام اعضای مجموعه A در B باشند، یعنی اگر $x \in A$ دلالت کند که $x \in B$، می‌نویسیم $A \subseteq B$ و می‌گوییم A زیرمجموعه B است. اگر $A \subseteq B$ ولی $A \neq B$، می‌گوییم A زیرمجموعه محض B است و می‌نویسیم $A \subset B$. برای هر مجموعه A، داریم $A \subseteq A$. برای دو مجموعه A و B، داریم $A = B$ اگر و فقط اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. برای هر سه مجموعه A، B و C، اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آنگاه $A \subseteq C$. برای هر مجموعه A داریم $\varnothing \subseteq A$.

گاهی مجموعه‌ها را برحسب مجموعه‌های دیگر تعریف می‌کنیم. با توجه به مجموعه A، می‌توان $B \subseteq A$ را با بیان خاصیتی تعریف کرد که عناصر B را متمایز می‌کند. به عنوان مثال، می‌توان مجموعه اعداد صحیح زوج را به صورت $\{x : x \in \mathbf{Z}$ و $x/2$ صحیح است$\}$ تعریف کرد. کولن (:) در این نمایش، به معنای "به طوری که" است (گاهی از خط عمودی | استفاده می‌شود).

با توجه به دو مجموعه A و B ، با استفاده از **عملیات‌های مجموعه‌ای** می‌توان مجموعه‌های جدیدی را تعریف کرد:

- اشتراک مجموعه‌های A و B به صورت زیر است:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$$

- اجتماع مجموعه‌های A و B به صورت زیر است:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

- تفاضل بین مجموعه‌های A و B به صورت زیر است:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

عملیات‌های مجموعه از قوانین زیر پیروی می‌کنند:

قوانین مجموعه تهی:

$$\begin{aligned} A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \cup \emptyset &= A \end{aligned}$$

قوانین همانی:

$$\begin{aligned} A \cap A &= A \\ A \cup A &= A \end{aligned}$$

قوانین جابه‌جایی:

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned}$$

قوانین شرکت‌پذیری:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \end{aligned}$$

قوانین توزیع‌پذیری:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \qquad \text{(ب-۱)}$$

قوانین جذب:

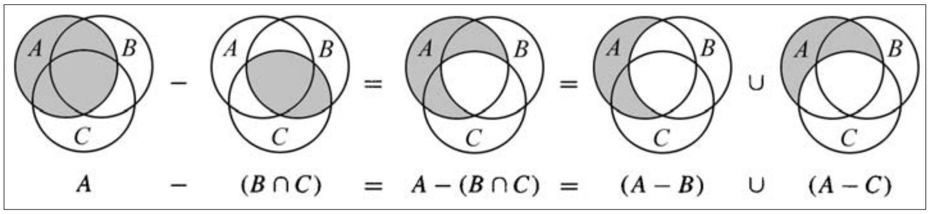
$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A \\ A \cup (A \cap B) &= A \end{aligned}$$

قوانین دمورگان:

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= (A - B) \cup (A - C) \\ A - (B \cup C) &= (A - B) \cap (A - C) \end{aligned} \qquad \text{(ب-۲)}$$

قانون اول دمورگان در شکل ب – ۱ با استفاده از **نمودار وِن** نمایش داده شده است. این نمودار، تصویر گرافیکی است که در آن، مجموعه‌ها به صورت ناحیه‌هایی در صفحه نمایش داده می‌شوند.

غالباً، تمام مجموعه‌ها، زیرمجموعه یک مجموعه بزرگ U به نام **مجموعه جهانی** هستند. به عنوان مثال، اگر مجموعه‌های مختلفی را درنظربگیریم که فقط از اعداد صحیح باشند، مجموعه اعداد صحیح **Z** ، مجموعه جهانی مناسبی است. با توجه به مجموعه جهانی U ، مکمل مجموعه A را به صورت $\overline{A} = U - Q$ نشان می‌دهیم.



شکل ب – ۱ نمودار وَن که قانون اول دمورگان (ب – ۲) را نشان می‌دهد. هر یک از مجموعه‌های A ، B و C به صورت دایره نشان داده شدند.

برای هر مجموعه $A \subseteq U$، قوانین زیر را داریم:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{A}} &= A\\ A\cap\overline{A} &= \emptyset\\ A\cup\overline{A} &= U\end{aligned}$$

قوانین دمورگان (ب – ۲) می‌توانند با مکمل‌ها نوشته شوند. برای هر دو مجموعه $B,C \subseteq U$، داریم:

$$\begin{aligned}\overline{B\cap C} &= \overline{B}\cup\overline{C}\\ \overline{B\cup C} &= \overline{B}\cap\overline{C}\end{aligned}$$

اگر دو مجموعه A و B اعضای مشترکی نداشته باشند، یعنی اگر $A\cap B=\emptyset$، می‌گوییم این دو مجموعه **جدا از هم**[1] هستند. کلکسیون $\mathcal{S}=\{S_i\}$ از مجموعه‌های غیرتهی، **افرازی** از مجموعه S را نشان می‌دهد، اگر:

- مجموعه‌ها **دو به دو جدا از هم** باشند، یعنی $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ و $i \neq j$ دلالت می‌کند که $S_i\cap S_j=\emptyset$ و
- اجتماع آن‌ها S است، یعنی:

$$S=\bigcup_{S_i\in\mathcal{S}} S_i$$

به عبارت دیگر، $\mathcal{S}$ در صورتی افرازی از S را ایجاد می‌کند که هر عنصر S دقیقاً در یک $S_i\in\mathcal{S}$ ظاهر شود.

تعداد عناصر در مجموعه را **عدد اصلی**[2] (یا **اندازه**) مجموعه می‌گویند و با $|S|$ نشان می‌دهیم. عدد اصلی دو مجموعه در صورتی یکسان است که عناصر آن‌ها تناظر یک به یک داشته باشند. عدد اصلی مجموعه تهی، برابر با $|\emptyset|=0$ است. اگر عدد اصلی مجموعه، عدد طبیعی باشد، می‌گوییم مجموعه **متناهی** است، وگرنه **نامتناهی** است. مجموعه نامتناهی که بتواند با اعداد طبیعی **N** تناظر یک به یک داشته باشد، **نامتناهی شمارش‌پذیر**[3] نام دارد، وگرنه **شمارش‌ناپذیر** است. مقادیر صحیح **Z** شمارش‌پذیر هستند، اما اعداد حقیقی **R** شمارش‌ناپذیراند.

برای هر دو مجموعه متناهی A و B ، همانی زیر را داریم:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B| \qquad \textbf{(ب – ۳)}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم که:

$$|A\cup B|\le|A|+|B|$$

اگر A و B جدا از هم باشند، آنگاه $|A\cap B|=0$ و در نتیجه $|A\cup B|=|A|+|B|$. اگر $A\subseteq B$، آنگاه $|A|\le|B|$.

1. disjoint 2. cardinality 3. infinite conutable

مجموعه متناهی n عنصری را گاهی **مجموعه – n** می‌نامند. مجموعه – ۱ را **مجموعه یکه** می‌گویند. زیرمجموعه‌ای از k عنصر یک مجموعه را گاهی **زیرمجموعه – k** می‌گویند.

مجموعه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های S ، از جمله مجموعه تهی و خود S را با 2^S نشان می‌دهیم و **مجموعه توانی**[1] S نام دارد. به عنوان مثال $2^{\{a,b\}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. عدد اصلیِ مجموعه توانیِ مجموعه متناهی S ، برابر است با $2^{|S|}$.

گاهی با ساختار شبه‌مجموعه سروکار داریم که در آن، عناصر مرتب‌اند. **زوج مرتب**[2] دو عنصر a و b به صورت (a, b) نشان داده می‌شود و می‌تواند به طور رسمی به صورت مجموعه $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$ نمایش داده شود. بنابراین، زوج مرتب (a, b) برابر با (b, a) نیست. **حاصل‌ضرب دکارتی** دو مجموعه A و B که با $A \times B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای از تمام زوج‌های مرتب است که اولین عنصر جفت، عنصری از A و دومی عنصری از B است:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ و } b \in B\}$$

به عنوان مثال:

$$\{a, b\} \times \{a, b, c\} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}$$

وقتی A و B مجموعه‌های متناهی باشند، عدد اصلی حاصلضرب دکارتی آن‌ها برابر است با:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| \qquad \text{(ب – ۴)}$$

حاصلضرب دکارتی مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ، مجموعه **n تایی** زیر است:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

که اگر تمام مجموعه‌ها متناهی باشند، عدد اصلی آن عبارت‌است‌از:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$$

حاصلضرب دکارتی n تایی را روی مجموعه A به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A^n = A \times A \times \cdots \times A$$

که اگر A متناهی باشد، عدد اصلی آن برابر است با $|A^n| = |A|^n$. یک n تایی را می‌توان دنباله متناهی به طول n دانست.

تمرین‌های بخش ب – ۱

تمرین ب–۱–۱: نمودارهای وَن را رسم کنید که اولین قانون توزیع‌پذیری (ب – ۱) را توصیف کند.

تمرین ب–۱–۲: تعمیم قانون دمورگان را به هر کلکسیونی از مجموعه‌ها اثبات کنید:

$$\begin{aligned} \overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} &= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n} \\ \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n} \end{aligned}$$

★ **تمرین ب–۱–۳:** تعمیم معادله (ب – ۳) را بسط دهیم، که **اصل شمول و استثنا**[3] نام دارد:

$$\begin{aligned} \overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} &= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n} \\ \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n} \end{aligned}$$

---

1. power set 2. ordered pair 3. principle of inclusion and exclusion

تمرین ب-۱-۴: نشان دهید که مجموعه‌ای از اعداد طبیعی فرد، شمارش‌پذیراست.

تمرین ب-۱-۵: نشان دهید که برای هر مجموعه متناهی S ، مجموعه توانی 2^S دارای $2^{|S|}$ عنصر است (یعنی، $2^{|S|}$ زیرمجموعه جدا از هم از S وجود دارد).

تمرین ب-۱-۶: یک تعریف استقرایی برای n تایی‌ها ارائه دهید. برای این کار، تعریف تئوری مجموعه را برای زوج مرتب بسط دهید.

ب-۲ رابطه‌ها

رابطه دودویی[1] R روی دو مجموعه A و B ، زیرمجموعه‌ای از ضرب دکارتی $A \times B$ است. اگر $a,b \in R$ ، گاهی می‌نویسیم $a\ R\ b$. وقتی می‌گوییم R رابطه دودویی روی مجموعه A است، معنایش این‌است‌که R زیرمجموعه $A \times A$ است. برای مثال، رابطه "کوچک‌تر از" در اعداد طبیعی، مجموعه $\{(a, b): a, b \in \mathbf{N}, a < b\}$ است. رابطه n تایی روی مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ، زیرمجموعه $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ است.

رابطه دودویی $R \subseteq A \times A$ **انعکاسی**[2] است اگر برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a\ R\ a$. به عنوان مثال، "=" و "≤" رابطه انعکاسی روی $\mathbf{N}$ هستند، ولی "<" نیست. رابطه $\mathbf{R}$ **متقارن** است اگر برای تمام $a,b \in A$ داشته باشیم:

$$a\ R\ b \text{ implies } b\ R\ a$$

برای مثال، "=" متقارن است، ولی "<" و "≤" نیستند. رابطه $\mathbf{R}$ در صورتی **متعدی** است که برای تمام $a,b,c \in A$ داشته باشیم:

$$a\ R\ b \text{ and } b\ R\ c \text{ imply } a\ R\ c$$

برای مثال، رابطه‌های "<" ، "≤" و "=" متعدی‌اند، ولی رابطه $R = \{(a,b) : a,b \in \mathbf{N}, a = b-1\}$ نیست، زیرا $3\ R\ 4$ و $4\ R\ 5$ دلالت نمی‌کند که $3\ R\ 5$.

رابطه‌ای که انعکاسی، متقارن، و متعدی باشد، **رابطه هم‌ارزی**[3] است. به عنوان مثال، "=" یک رابطه هم‌ارزی روی اعداد طبیعی است، ولی "<" نیست. اگر $\mathbf{R}$ یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه A باشد، آنگاه برای $a \in A$ **دسته هم‌ارزی**[4] a ، مجموعه $[a] = \{b \in A : a\ R\ b\}$ است، یعنی، مجموعه‌ای از تمام عناصر هم‌ارز با a . برای مثال، اگر $R = \{(a,b) : a,b \in \mathbf{N}$ ، $a+b\}$ یک عدد صحیح است، و R آنگاه R رابطه هم‌ارزی است، زیرا $a+a$ زوج است (انعکاسی)، اگر $a+b$ زوج باشد دلالت می‌کند که $b+a$ زوج است (متقارن)، و اگر $a+b$ زوج باشد و $b+c$ نیز زوج باشد، دلالت می‌کند که $a+c$ زوج است (متعدی). دسته هم‌ارزی ۴ برابر است با $[4] = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ ، و دسته هم‌ارزی ۳ برابر است با $[3] = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. قضیه اساسی کلاس هم‌ارزی به صورت زیر است.

قضیه ب - ۱ (رابطه هم‌ارزی، شبیه افراز است)

دسته‌های هم‌ارزی رابطه هم‌ارزی R روی مجموعه A ، افرازی از A را تشکیل می‌دهد، و هر افراز A ، یک رابطه هم‌ارزی روی A را تعیین می‌کند که برای آن، مجموعه‌ها در این افراز، دسته‌های هم‌ارزی‌اند.

---
1. binary relation 2. reflexive 3. equivalence relation 4. equivalence class

اثبات: برای بخش اول اثبات، باید نشان دهیم که دسته‌های هم‌ارزی R ، مجموعه‌های دو به دو جدا از هم هستند که اجتماع آن‌ها، A است. چون R انعکاسی است، $a \in [a]$، و در نتیجه دسته‌های هم‌ارزی غیرتهی‌اند. علاوه‌براین، چون هر عنصر $a \in A$ به دسته هم‌ارزی $[a]$ تعلق دارد، اجتماع دسته‌های هم‌ارزی، برابر با A است. اکنون باید نشان دهیم که دسته‌های هم‌ارزی دو به دو جدا از هم هستند، یعنی، اگر دو دسته هم‌ارزی $[a]$ و $[b]$ عضو مشترک c را داشته باشند، آنگاه مجموعه‌های یکسانی‌اند. اکنون $a R c$ و $b R c$ ، که بنا به خواص تقارن و تعدی، داریم $a R b$. بنابراین، برای هر عنصر دلخواه $x \in [a]$، داریم $x R a$ دلالت می‌کند که $x R b$ ، و در نتیجه $[a] \subseteq [b]$. به طور مشابه، $[b] \subseteq [a]$ و در نتیجه $[a] = [b]$.

برای بخش دوم اثبات، فرض کنید $\mathcal{A} = \{A_i\}$ افراز A باشد، و تعریف کنید:

$$R = \{(a,b) : b \in A_i, a \in A_i \text{ وجود دارد، به طوری که } i\}$$

ادعا می‌کنیم که R رابطه هم‌ارزی روی A است. خاصیت انعکاسی برقرار است، زیرا $a \in A_i$ دلالت می‌کند که $a R a$. خاصیت تقارن برقرار است، زیرا، اگر $a R b$ ، آنگاه a و b در مجموعه A_i قرار دارند، و در نتیجه $b R a$. اگر $a R b$ و $b R c$ ، آنگاه هر سه عنصر در یک مجموعه قرار دارند، و در نتیجه $a R c$ و خاصیت انعکاسی برقرار است. برای این‌که ببینید مجموعه‌ها در افراز، دسته‌های هم‌ارزی R هستند، مشاهده می‌کنید که اگر $a \in A_i$، آنگاه $x \in [a]$ دلالت می‌کند که $x \in A_i$ و $x \in A_i$ دلالت می‌کند که $x \in [a]$. ■

رابطه دودویی R روی مجموعه A **ضد تقارن**[1] است اگر:

$$a \, R \, b \text{ and } b \, R \, a \text{ imply } a = b$$

به عنوان مثال، رابطه "$\leq$" روی اعداد طبیعی، ضد تقارن است، زیرا $a \leq b$ و $b \leq a$ دلالت می‌کند که $a = b$. رابطه‌ای که انعکاسی، ضد تقارن، و متعدی است، **مرتب جزیی**[2] است، و مجموعه‌ای که ترتیب جزیی روی آن تعریف می‌شود، **مجموعه مرتب جزیی** نام دارد. به عنوان مثال، رابطه "فرزندبودن"، ترتیب جزیی روی مجموعه‌ای از افراد است (اگر هر فرد را فرزند خودش بدانیم).

در مجموعه مرتب جزیی A ، ممکن‌است تنها یک عنصر "ماکزیمم" a وجود نداشته باشد به طوری که برای تمام $b \in A$ داشته باشیم $b R a$. در عوض، ممکن‌است چندین عنصر ماکزیمم a وجود داشته باشد که برای هیچ $b \in A$ که $b \neq a$، رابطه $a R b$ برقرار باشد. برای مثال، در کلکسیونی از جعبه‌هایی با اندازه‌های مختلف، ممکن‌است چندین جعبه ماکزیمم وجود داشته باشند که در جعبه دیگری جا نشود، ولی تنها یک جعبه ماکزیمم وجود نداشته باشد که هر جعبه دیگری در آن قرار گیرد[3].

ترتیب جزیی R روی مجموعه A ، در صورتی **ترتیب کلی** یا **خطی** است که برای تمام $a,b \in A$، داشته باشیم $a R b$ یا $b R a$ ، یعنی هر جفت از عناصر A بتوانند از طریق R با هم رابطه داشته باشند. برای مثال، رابطه "$\leq$" ، ترتیب کلی روی اعداد طبیعی است، ولی رابطه "فرزندبودن" ، ترتیب کلی در مجموعه‌ای از افراد نیست، زیرا افرادی وجود دارند که فرزند دیگری نیستند.

1. antisymmetric 2. partial order

۳. برای این‌که رابطه "جاشدن در داخل"، مرتب جزیی باشد، باید فرض کنیم جعبه در داخل خودش جا می‌شود.

تمرین‌های بخش ب – ۲

تمرین ب-۲-۱: ثابت کنید رابطه زیرمجموعه "$\subseteq$" روی تمام زیرمجموعه‌های $\mathbf{Z}$ ، ترتیب جزیی است ولی ترتیب کلی نیست.

تمرین ب-۲-۲: نشان دهید که برای هر عدد صحیح مثبت n ، رابطه "هم‌ارزی به پیمانه n "، رابطه هم‌ارزی روی اعداد صحیح است (اگر عدد صحیح q وجود داشته باشد که $a - b = qn$ ، می‌گوییم $a \equiv b \pmod n$). در کدام دسته‌های هم‌ارزی، این رابطه، مقادیر صحیح را افراز می‌کند؟

تمرین ب-۲-۳: نمونه‌هایی از رابطه‌ها را ارائه دهید که:

الف. انعکاسی و متقارن هستند ولی متعدی نیستند.

ب. انعکاسی و متعدی هستند ولی متقارن نیستند.

پ. متقارن و متعدی هستند ولی انعکاسی نیستند.

تمرین ب-۲-۴: فرض کنید S مجموعه متناهی، و R رابطه هم‌ارزی روی $S \times S$ باشد، نشان دهید که اگر R ضد تقارن باشد، آنگاه دسته‌های هم‌ارزی S نسبت به R ، یکه هستند.

تمرین ب-۲-۵: پروفسور Narcissus ادعا می‌کند که اگر رابطه R متقارن و متعدی باشد، آنگاه انعکاسی نیز هست. اثبات زیر را ارائه می‌کند. بنا به خاصیت تقارن، $a\ R\ b$ دلالت می‌کند که $b\ R\ a$. بنابراین خاصیت تعدی دلالت می‌کند که $a\ R\ a$. آیا پروفسور درست می‌گوید؟

ب–۳ توابع

با توجه به دو مجموعه A و B ، **تابع** f یک رابطه دودویی روی $A \times B$ است، به طوری که برای تمام $a \in A$، دقیقاً یک $b \in B$ وجود دارد که $(a,b) \in f$. مجموعه A را **دامنه**[1] $\mathbf{f}$ و مجموعه B را **هم‌دامنه**[2] یا برد f می‌گویند. گاهی می‌نویسیم $f: A \to B$ و اگر $(a,b) \in f$، می‌نویسیم $b = f(a)$ ، زیرا b به طور یکتا توسط انتخاب a تعیین می‌شود.

از نظر شهودی، تابع f عنصری از B را به هر عنصر A نسبت می‌دهد. هیچ عنصری از A به دو عنصر مختلف B نسبت داده نمی‌شود، اما یک عنصر از B می‌تواند به دو عنصر مختلف از A نسبت داده شود. برای مثال، رابطه دودویی زیر را درنظربگیرید:

$$f = \{(a,b) : a, b \in \mathbf{N} \text{ و } b = a \bmod 2\}$$

این رابطه، تابع $f: \mathbf{N} \to \{0,1\}$ است، زیرا برای هر عدد طبیعی a ، دقیقاً یک مقدار b در $\{0,1\}$ وجود دارد که $b = a \bmod 2$. برای این مثال، $0 = f(0)$ و $1 = f(1)$، و $0 = f(2)$ ، و غیره. اکنون رابطه دودویی زیر را در نظر بگیرید:

$$g = \{(a,b) : a, b \in \mathbf{N} \text{ and } a + b \text{ is even}\}$$

این رابطه، یک تابع نیست، زیرا $(1,3)$ و $(1,5)$ در g قرار دارند، و در نتیجه برای انتخاب $a = 1$ ، دقیقاً یک b وجود ندارد که $(a,b) \in g$ باشد.

با توجه به تابع $f: A \to B$، اگر $b = f(a)$ ، می‌گوییم a **آرگومان**[3] f و b **مقدار** f در a است. تابع را می‌توان با بیان مقدار هر عنصر دامنه آن تعریف کرد. برای مثال، می‌توان تابع $f(n) = 2n$ را برای $n \in \mathbf{N}$ تعریف

1. domain 2. codomain 3. argument

کرد، که به معنای این‌است‌که $f = \{(n, 2n) : n \in \mathbf{N}\}$. دو تابع f و g در صورتی مساوی‌اند که دامنه و برد یکسانی داشته باشند، و برای تمام a موجود در دامنه، $f(a) = g(a)$.

دنباله متناهی[1] به طول n ، تابعی است که دامنه آن مجموعه‌ای از n مقدار صحیح $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ است. اغلب، دنباله متناهی را با توجه به مقادیر آن نشان می‌دهیم: $\langle f(0), f(1), \ldots, f(n-1)\rangle$. **دنباله نامتناهی**[2]، تابعی است که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی **N** است. برای مثال، دنباله فیبوناچی که با رابطه بازگشتی (۲۱-۳) تعریف شد، دنباله نامتناهی $\langle 0,1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots\rangle$ است.

وقتی دامنه تابع f ، حاصلضرب دکارتی باشد، غالباً پرانتزهای اضافی اطراف آرگومان f را حذف می‌کنیم. برای مثال، اگر داشتیم $f : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$، به جای این‌که بنویسیم $b = f((a_1, a_2, \ldots, a_n))$، می‌نوشتیم $b = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. هر a_i را نیز آرگومان تابع f می‌نامیم، گرچه از نظر تکنیکی تنها آرگومان f ، n تایی $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ است.

اگر $f : A \to B$ یک تابع و $b = f(a)$ باشد، آنگاه گاهی می‌گوییم b **تصویر**[3] a تحت f است. تصویر مجموعه $A' \subseteq A$ تحت f ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(A') = \{b \in B : b = f(a) \text{ for some } a \in A'\}$$

بازه‌ی f ، تصویر دامنه‌اش، یعنی $f(A)$ است. برای مثال، بازه‌ی تابع $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ که توسط $f(n) = 2n$ تعریف می‌شود، برابر است با $f(\mathbf{N}) = \{m : m = 2n$ برای $n \in \mathbf{N}$ داریم $\}$.

تابع در صورتی **پوشا**[4] است که بازه‌ی آن، برابر با برد آن باشد. برای مثال، تابع $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ تابع پوشایی از **N** به **N** است، زیرا هر عنصر در **N** ، به عنوان مقدار f به ازای یک آرگومان ظاهر می‌شود. برعکس، تابع $f(n) = 2n$ تابع پوشایی از **N** به **N** نیست، زیرا هیچ آرگومان f نمی‌تواند مقدار ۳ را تولید کند. تابع $f(n) = 2n$ ، تابع پوشایی از اعداد طبیعی به اعداد زوج است. تابع پوشای $f : A \to B$ گاهی نگاشت A **به روی**[5] B توصیف می‌شود.

تابع $f : A \to B$ در صورتی یک به یک[6] است که آرگومان‌های مجزای f ، مقادیر مجزایی تولید کنند، یعنی اگر $a \neq a'$، آنگاه $f(a) \neq f(a')$. برای مثال، تابع $f(n) = 2n$ ، تابع یک به یک از **N** به **N** است، زیرا هر عدد زوج b ، تصویر تحت f از حداکثر یک عنصر دامنه، یعنی $b/2$ است. تابع $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ یک به یک نیست، زیرا مقدار ۱ توسط دو آرگومان تولید می‌شود: ۲ و ۳.

تابع $f : A \to B$ در صورتی **دوسو**[7] است که یک به یک و پوشا باشد. برای مثال، تابع $f(n) = (-1)^n \lceil n/2 \rceil$ تابعی دوسو از **N** به **Z** است:

$$\begin{array}{ccr} 0 & \to & 0\,, \\ 1 & \to & -1\,, \\ 2 & \to & 1\,, \\ 3 & \to & -2\,, \\ 4 & \to & 2\,, \\ & \vdots & \end{array}$$

1. finite sequence 2. infinite sequence 3. image 4. surjection 5. onto 6. injection 7. bijection

این تابع به این دلیل یک به یک است که هیچ عنصر $\mathbf{Z}$ ، تصویر بیش از یک عنصر از $\mathbf{N}$ نیست. به این دلیل پوشا است که هر عنصر Z به عنوان تصویر عنصری از N است. بنابراین، تابع دوسو است. تابع دوسو را گاهی تناظر یک به یک[1] گویند، زیرا عناصر موجود در دامنه و برد را جفت می‌کند. تابع دوسو از مجموعه A به خودش، گاهی **جایگشت**[2] نامیده می‌شود.

وقتی تابعی دوسو است، معکوس f^{-1} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{-1}(b) = a \text{ اگر و فقط اگر } f(a) = b$$

برای مثال، معکوس تابع $f(n) = (-1)^n \lceil n/2 \rceil$ به صورت زیر است:

$$f^{-1}(m) = \begin{cases} 2m & \text{اگر } m \geq 0 \\ -2m - 1 & \text{اگر } m < 0 \end{cases}$$

تمرین‌های بخش ب – ۳

تمرین ب-۳-۱: فرض کنید A و B مجموعه‌های متناهی باشند، و $f : A \to B$ یک تابع باشد. نشان دهید که:

الف. اگر f یک به یک باشد، آنگاه $|A| \leq |B|$.

ب. اگر f پوشا باشد، آنگاه $|A| \geq |B|$.

تمرین ب-۳-۲: آیا وقتی که دامنه و برد تابع $f(x) = x+1$ برابر با $\mathbf{N}$ باشد، دوسو است یا خیر؟ آیا وقتی دامنه و برد آن $\mathbf{Z}$ است، دوسو است؟

تمرین ب-۳-۳: یک تعریف طبیعی برای معکوس رابطه‌ی دودویی ارائه دهید، به طوری که اگر رابطه‌ای یک تابع دوسو است، معکوس رابطه‌ای آن، معکوس تابعی آن باشد.

★ **تمرین ب-۳-۴:** یک تابع دوسو از $\mathbf{Z}$ به $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ارائه دهید.

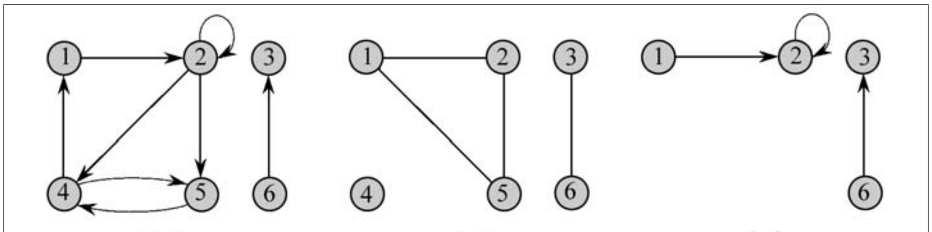
ب–۴ گراف‌ها

این بخش، دو نوع گراف را ارائه می‌دهد: جهت‌دار و بدون جهت. تعریف‌هایی که در بعضی متون آمده است، با آنچه که در این‌جا می‌بینید فرق می‌کند.

گراف جهت‌دار (یا **دیاگراف**) G ، زوج (V, E) است که V مجموعه متناهی و E یک رابطه دودویی روی V است. مجموعه V را **مجموعه رأس** G ، و عناصرش را رئوس می‌نامند. مجموعه E را **مجموعه یال** G می‌نامند، و عناصر آن **یال** نام دارند. شکل ب – ۲ (الف) نمایش تصویری گراف جهت‌دار روی مجموعه رأس {1, 2, 3, 4, 5, 6} است. در شکل، رئوس با دایره و یال‌ها با پیکان نشان داده شدند. توجه کنید که خودحلقه‌ها[3] – یال‌هایی از یک رأس به خودش – امکان‌پذیر است.

در **گراف جهت‌دار** $G = (V, E)$ ، مجموعه یال E شامل زوج‌های نامرتب از رئوس است. یعنی یال، مجموعه{u, v} است که $u, v \in V$ و $u \neq v$. طبق قرارداد، به جای نماد {u, v} از نماد (u, v) برای یال استفاده می‌کنیم، و (u, v) و (v, u) یک یال در نظر گرفته می‌شوند. در گراف بدون جهت، وجود خودحلقه‌ها ممنوع است، و در نتیجه هر یال شامل دقیقاً دو رأس جدا از هم است. شکل ب – ۲ (ب) نمایش تصویری گراف بدون جهت روی مجموعه رأس {1, 2, 3, 4, 5, 6} است.

1. one-to-one correspondence 2. permutation 3. self-loop



شکل ب – ۲ گراف‌های جهت‌دار و بدون جهت. (الف) گراف جهت‌دار $G = (V, E)$، که $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $E = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$. یال $(2, 2)$ خودحلقه است. (ب) گراف بدون جهت $G = (V, E)$، که $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$. رأس 4 جدا شده است. (پ) زیرگراف مربوط به گراف قسمت (الف) که ناشی از مجموعه رأس $\{1, 2, 3, 6\}$ است.

بسیاری از تعاریف مربوط به گراف‌های جهت‌دار و بدون جهت یکسان هستند، گرچه بعضی از اصطلاحات در دو گراف، معنای متفاوتی دارند. اگر (u, v) یالی در گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ باشد، می‌گوییم (u, v) از رأس u خارج می‌شود و به رأس v وارد می‌شود. برای مثال، یال‌های خروجی در شکل ب – ۲ (الف) عبارتنداز $(2, 2)$، $(2, 4)$، و $(2, 5)$. یال‌های ورودی رأس ۲ عبارتنداز $(1, 2)$ و $(2, 2)$. اگر (u, v) یالی در گراف بدون جهت $G = (V, E)$ باشد، می‌گوییم (u, v) منطبق بر رئوس u و v است. در شکل ب – ۲ (ب)، یال‌های منطبق بر رأس 2 عبارتنداز $(1, 2)$ و $(2, 5)$.

اگر (u, v) یالی در گراف $G = (V, E)$ باشد، می‌گوییم رأس x **همجوار** رأس u است. وقتی گراف بدون جهت باشد، رابطه همجواری متقارن است. وقتی گراف جهت‌دار باشد، رابطه همجواری الزاماً متقارن نیست. اگر v همجوار u در گراف جهت‌دار باشد، گاهی می‌نویسیم $u \to v$. در قسمت‌های (الف) و (ب) در شکل ب – ۲، رأس 2 همجوار رأس 1 است، زیرا یال $(1, 2)$ به هر دو گراف تعلق دارد. رأس 1 همجوار رأس 2 در شکل ب – ۲ (الف) نیست، زیرا یال $(2, 1)$ متعلق به گراف نیست.

درجه[1] رأس در گراف بدون جهت، برابر با تعداد یال‌هایی است که در آن یکدیگر را قطع می‌کنند. برای مثال، رأس ۲ در شکل ب – ۲ (ب) دارای درجه ۲ است. رأسی که درجه آن صفر است، مثل رأس 4 در شکل ب – ۲ (ب)، **جدا شده است**[2]. در گراف جهت‌دار، **درجه خروجی** رأس، برابر با تعداد یال‌هایی است که از آن خارج می‌شوند، و **درجه ورودی** رأس، برابر با تعداد یال‌هایی است که به آن وارد می‌شوند. درجه رأس در گراف جهت‌دار، برابر با مجموع درجه‌های ورودی و خروجی آن است. رأس ۲ در شکل ب – ۲ (الف) دارای درجه ورودی ۲، درجه خروجی ۳، و درجه ۵ است.

مسیری به **طول** k از رأس u به رأس u' در گراف $G = (V, E)$، دنباله $\langle v_0, v_1, v_2, ..., v_k \rangle$ از رئوس است، به طوری که $u = v_0$ و $u' = v_k$، و برای $i = 1, 2, \dots, k$، $(v_{i-1}, v_i) \in E$. طول مسیر برابر با تعداد یال‌ها در آن مسیر است. مسیر **شامل** رئوس $v_0, v_1, ..., v_k$ و یال‌های $(v_0, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_{k-1}, v_k)$ است (همیشه مسیری به طول صفر از u به u وجود دارد). اگر مسیری از u به u' وجود داشته باشد، می‌گوییم u' از

1. degree 2. isolated

u از طریق p قابل دسترسی است، که اگر گراف جهت‌دار باشد، گاهی می‌نویسیم $u \overset{p}{\leadsto} u'$. مسیر در صورتی **ساده** است که تمام رئوس موجود در مسیر، جدا از هم باشند. در شکل ب – ۲ (الف)، مسیر $\langle 1,2,5,4 \rangle$ مسیر ساده‌ای به طول ۳ است. مسیر $\langle 2,5,4,5 \rangle$ ساده نیست.

زیرمسیری[1] از مسیر $p = \langle v_0, v_1, ..., v_k \rangle$ زیردنباله‌ی پیوسته‌ای از رئوس آن است. یعنی، برای هر $0 \le i \le j \le k$ ، زیردنباله‌ای از رئوس $\langle v_i, v_{i+1}, ..., v_j \rangle$ زیرمسیری از p است.

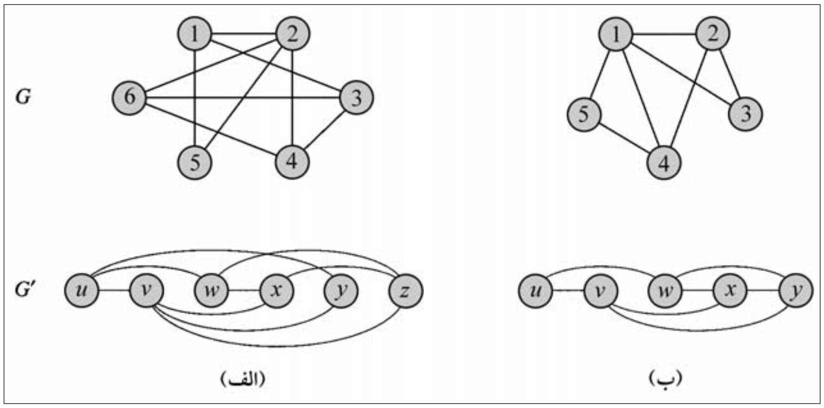
در گراف جهت‌دار، مسیر $\langle v_0, v_1, ..., v_k \rangle$ یک **دور**[2] ایجاد می‌کند اگر $v_0 = v_k$ و مسیر حداقل شامل یک یال باشد. دور در صورتی ساده است که $v_1, v_2, ..., v_k$ جدا از هم باشند. خودحلقه، دوری به طول ۱ است. دو مسیر $\langle v_0, v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_0 \rangle$ و $\langle v'_0, v'_1, v'_2, ..., v'_{k-1}, v'_0 \rangle$ در صورتی دور یکسان هستند که مقدار صحیح j وجود داشته باشد که برای $i = 0, 1, \dots, k-1$ داشته باشیم $v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$. در شکل ب – ۲ (الف)، مسیر $\langle 1,2,4,1 \rangle$ دوری یکسان با مسیرهای $\langle 2,4,1,2 \rangle$ و $\langle 4,1,2,4 \rangle$ ایجاد می‌کند. این دور، ساده است، ولی دور $\langle 1,2,4,5,4,1 \rangle$ ساده نیست. دور $\langle 2,2 \rangle$ که توسط یال $(2, 2)$ ایجاد می‌شود، خودحلقه است. گراف جهت‌دار بدون خودحلقه، ساده است. در گراف بدون جهت، مسیر $\langle v_0, v_1, ..., v_k \rangle$ ، در صورتی **دور (ساده‌ای)** را ایجاد می‌کند که $k \ge 3$ ، $v_0 = v_k$ ، و $v_1, v_2, ..., v_k$ جدا از هم باشند. برای مثال، در شکل ب – ۲ (ب) مسیر $\langle 1,2,5,1 \rangle$ یک دور است. گراف فاقد دور را **گراف بدون دور**[3] می‌نامند.

گراف بدون جهت، **متصل**[4] (همبند) است اگر هر جفت رأس توسط مسیری به هم متصل باشند. **مولفه‌های متصل**[5] گراف، دسته‌های هم‌ارزی رئوس تحت رابطه‌ی "قابل دسترس از" است. گراف شکل ب – ۲ (ب) سه مولفه متصل دارد: $\{1, 2, 5\}$ ، $\{3, 6\}$ و $\{4\}$. هر رأس در $\{1, 2, 5\}$ از هر رأس در $\{1, 2, 5\}$ قابل دسترسی است. گراف بدون جهت در صورتی متصل است که دقیقاً یک مولفه متصل داشته باشد، یعنی، اگر هر رأس از رأس دیگر قابل دسترس باشد.

گراف جهت‌دار در صورتی **متصل قوی**[6] (همبند قوی) است که هر دو رأس از یکدیگر قابل دسترس باشند. **مولفه‌های متصل قوی** در گراف جهت‌دار، دسته‌های هم‌ارزی رئوس تحت رابطه‌ی "متقابلاً قابل دسترس" هستند. گراف جهت‌دار در صورتی متصل قوی است که فقط یک مولفه متصل قوی داشته باشد. گراف شکل ب – ۲ (الف) سه مولفه متصل قوی دارد: $\{1, 2, 4, 5\}$ ، $\{3\}$ و $\{6\}$. تمام جفت‌های رئوس در $\{1, 2, 4, 5\}$ متقابلاً قابل دسترس هستند. رئوس $\{3, 6\}$ تشکیل مولفه متصل را نمی‌دهند، زیرا رأس 6 از رأس 3 قابل دسترس نیست.

دو گراف $G = (V, E)$ و $G' = (V', E')$ در صورتی هم‌شکل[7] هستند که تابع دوسوی $f : V \to V'$ وجود داشته باشد، به طوری که $(u, v) \in E$ اگر و فقط اگر $(f(u), f(v)) \in E'$. به عبارت دیگر، می‌توان رئوس G را تغییر برچسب داد تا رئوس G' محسوب شوند و یال‌های متناظر در G و G' حفظ گردند. شکل ب – ۳ (الف) جفتی از گراف‌های هم‌شکل G و G' را همراه با مجموعه‌های رأس $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $V' = \{u, v, w, x, y, z\}$ نشان می‌دهد. نگاشت از V به V' که توسط $f(1) = u$ ، $f(2) = v$ ، $f(3) = w$ ، $f(4) = x$ ، $f(5) = y$ و $f(6) = z$ مشخص می‌شود، تابع دوسوی موردنظر است. گراف‌ها در شکل ب – ۳ (ب) هم‌شکل نیستند. گرچه هر دو گراف ۵ رأس و ۷ یال دارند، گراف بالایی دارای رأسی با درجه ۴ است ولی گراف پایینی فاقد آن است.

1. subpath 2. cycle 3. acyclic 4. connected 5. connected components
6. strongly connected 7. isomorphic



شکل ب – ۳ (الف) دو گراف هم‌شکل. رئوس گراف بالایی توسط $f(1) = u$ ، $f(2) = v$ ، $f(3) = w$ ، $f(4) = x$ ، $f(5) = y$ و $f(6) = z$ به گراف پایینی نگاشت می‌شوند. (ب) دو گراف که هم‌شکل نیستند، زیرا گراف بالایی دارای رأسی با درجه ۴ و گراف پایینی فاقد آن است.

اگر $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$، می‌گوییم $G' = (V', E')$ **زیرگراف**[1] $G = (V, E)$ است. با توجه به مجموعه $V' \subseteq V$، زیرگراف G که از V' حاصل می‌شود، گراف $G' = (V', E')$ است، که در آن داریم:

$$E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$$

زیرگراف حاصل از مجموعه رأس $\{1, 2, 3, 6\}$ در شکل ب – ۲ (الف)، در شکل ب – ۲ (پ) ظاهر می‌شود و دارای مجموعه یال $\{(1, 2), (2, 2), (6, 3)\}$ است.

با توجه به گراف بدون جهت $G = (V, E)$ ، **نسخه‌ی جهت‌دار** G ، گراف جهت‌دار $G' = (V, E')$ است که $(u, v) \in E'$ اگر و فقط اگر $(u, v) \in E$. یعنی، هر یال بدون جهت (u, v) در G ، در نسخه‌ی جهت‌دار توسط دو یال جهت‌دار (u, v) و (v, u) جایگزین می‌شود. با توجه به گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ ، **نسخه‌ی بدون جهت** G ، گراف بدون جهت $G' = (V, E')$ است، که $(u, v) \in E'$ اگر و فقط اگر $u \neq v$ و $(u, v) \in E$. یعنی، نسخه‌ی بدون جهت شامل یال‌های G است که جهت آن‌ها حذف شد و خودحلقه‌ها نیز از بین رفتند. (چون (u, v) و (v, u) یال یکسانی در گراف بدون جهت هستند، در نسخه‌ی بدون جهت گراف جهت‌دار فقط یک بار ظاهر می‌شوند، حتی اگر گراف جهت‌دار شامل هر دو یال (u, v) و (v, u) باشد). در گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ ، **همسایه**[2] رأس u ، هر رأسی است که در نسخه‌ی بدون جهت G همجوار[3] u است. یعنی، v در صورتی همسایه u است که $u \neq v$ و $(u, v) \in E$ یا $(v, u) \in E$. در گراف بدون جهت، u و v در صورتی همسایه هستند که همجوار باشند.

گراف‌هایی با اسامی خاص وجود دارند. **گراف کامل**[4]، گراف بدون جهتی است که در آن هر جفت رأس، همجوار هستند. **گراف دو بخشی**[5]، گراف بدون جهتی است که در آن V می‌تواند به دو مجموعه V_1 و V_2 افراز شود به طوری که $(u, v) \in E$ دلالت می‌کند که یا $u \in V_1$ و $v \in V_2$ یا $u \in V_2$ و $v \in V_1$ است. یعنی تمام یال‌ها بین مجموعه‌های V_1 و V_2 واقع‌اند. گراف بدون جهت بدون دور، یک **جنگل** است و گراف

1. subgraph 2. neighbor 3. adjacent 4. complete graph 5. bipartite graph

بدون جهت بدون دور متصل، **درخت آزاد**[1] است. معمولاً از حروف اول گراف بدون جهت بدون دور استفاده کرده آن را یک **dag** می‌نامیم.

با دو نوع گراف بیشتر برخورد خواهید داشت. **گراف چندگانه**[2]، شبیه گراف بدون جهت است، ولی می‌تواند شامل خودحلقه باشد و بین رأس‌ها می‌تواند چندین یال وجود داشته باشد. **اَبَرگراف**[3] شبیه گراف بدون جهت است، ولی هر اَبَریال[4] به جای این‌که دو رأس را به هم متصل کند، زیرمجموعه دلخواهی از رئوس را متصل می‌کند. بسیاری از الگوریتم‌هایی که برای گراف‌های جهت‌دار و بدون جهت نوشته شدند، می‌توانند برای این ساختارهای شبه‌گراف استفاده شوند.

انقباض[5] گراف بدون جهت $G = (V, E)$ توسط یال $e = (u, v)$ ، گراف $G' = (V', E')$ است که $V' = V - \{u, v\} \cup \{x\}$ و x رأس جدیدی است. مجموعه یال‌های E' از E تشکیل می‌شود که یال (u, v) از آن حذف شد، و برای هر رأس w که منطبق بر u یا v است، هر کدام از یال‌های (u, w) و (v, w) که در E بودند، حذف شدند و یال جدید (x, w) اضافه شده است.

تمرین‌های بخش ب – ۴

تمرین ب-۴-۱: حاضرین در یک مهمانی دانشکده، برای احوالپرسی از یکدیگر، دست تکان می‌دهند، و هر پروفسور به یاد دارد که چند بار دست‌تکانی کرده است. در انتهای مهمانی، رییس اداره تعداد دفعاتی که هر پروفسور دست خود را تکان داده است، جمع می‌کند. با اثبات **لِم دست‌تکانی**، نشان دهید که نتیجه زوج است: اگر $G = (V, E)$ ، داریم:

$$\sum_{v \in V} \text{degree}(v) = 2|E|$$

تمرین ب-۴-۲: نشان دهید که اگر گراف جهت‌دار یا بدون جهت شامل مسیری بین دو رأس u و v باشد، آنگاه شامل مسیر ساده‌ای بین u و v است. نشان دهید که اگر گراف جهت‌دار شامل دور باشد، آنگاه شامل دور ساده است.

تمرین ب-۴-۳: نشان دهید که در هر گراف متصل و بدون جهت $G = (V, E)$ رابطه $|E| \geq |V| - 1$ برقرار است.

تمرین ب-۴-۴: وارسی کنید که در گراف بدون جهت، رابطه‌ی "قابل دسترس از"، رابطه‌ی هم‌ارزی روی رئوس گراف است. کدام یک از سه خاصیت رابطه‌ی هم‌ارزی، در حالت کلی برای رابطه "قابل دسترس از" روی گراف جهت‌دار برقرار است؟

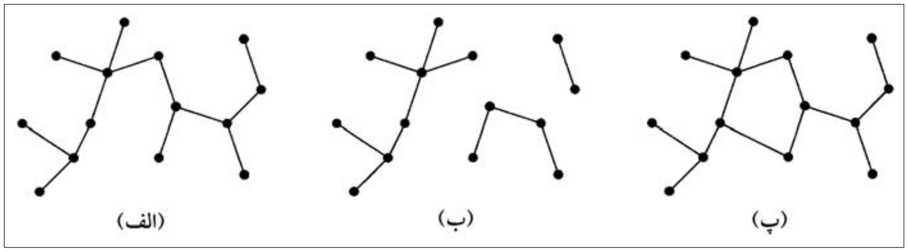
تمرین ب-۴-۵: نسخه‌ی بدون جهت گراف جهت‌دار در شکل ب – ۲ (الف) چیست؟ نسخه‌ی جهت‌دار گراف بدون جهت در شکل ب – ۲ (ب) چیست؟

★ **تمرین ب-۴-۶:** اگر انطباق در اَبَرگراف متناظر با همجواری در گراف دوبخشی مجاز باشد، نشان دهید که اَبَرگراف می‌تواند توسط گراف دوبخشی نمایش داده شود (*راهنمایی:* فرض کنید یک مجموعه از رئوس در گراف دوبخشی متناظر با رئوس اَبَرگراف است، و فرض کنید مجموعه دیگری از رئوس گراف دوبخشی، متناظر با اَبَریال‌ها است).

ب–۵ درخت‌ها

در این بخش، انواع مختلفی از درخت‌ها را بحث می‌کنیم. بخش‌های ۴–۱۰ و ۱–۲۲ چگونگی نمایش درخت‌ها را در حافظه کامپیوتر نشان می‌دهند.

1. free tree 2. multigraph 3. hypergraph 4. hyperedge 5. contraction



شکل ب – ۴ (الف) درخت آزاد. (ب) جنگل. (پ) گرافی که شامل یک دور است، بنابراین نه درخت و نه جنگل است.

ب – ۵–۱ درخت‌های آزاد

همان‌طور که در بخش ب – ۴ بحث شد، **درخت آزاد**، گراف بدون جهت و بدون دور متصل است. وقتی می‌گوییم که گراف یک درخت است، از واژه‌ی "آزاد" صرف‌نظر می‌کنیم. اگر گراف بدون جهت، بدون دور باشد، ولی احتمالاً منفصل باشد، یک **جنگل** است. بسیاری از الگوریتم‌های مربوط به درخت، برای جنگل کار می‌کنند. شکل ب –۴ (الف) یک درخت آزاد و شکل ب – ۴ (ب) یک جنگل را نشان می‌دهد. جنگل در شکل ب – ۴، درخت نیست زیرا شامل دور است. گراف شکل ب – ۴ (پ) نه درخت و نه جنگل است، زیرا شامل دور است.

قضیه زیر بسیاری از حقایق را درباره درخت بیان می‌کند.

قضیه ب – ۲ (خواص درخت‌های آزاد)

فرض کنید $G = (V, E)$ گراف بدون جهت باشد. گزاره‌های زیر، معادل‌اند:

۱. G درخت آزاد است.

۲. هر دو رأس در G توسط مسیر ساده‌ی یکتایی به هم متصل‌اند.

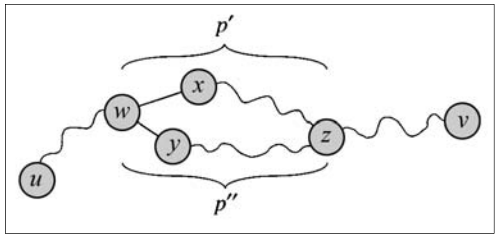
۳. G متصل است، اما اگر هر یالی از E حذف شود، گراف حاصل، منفصل است.

۴. G متصل است، و $|E| = |V| - 1$.

۵. G بدون دور است، و $|E| = |V| - 1$.

۶. G بدون دور است، و اگر یالی به E اضافه شود، گراف حاصل، شامل دور است.

اثبات: $(1) \Rightarrow (2)$: چون درخت، متصل است، هر دو رأس در G حداقل توسط یک مسیر ساده به هم متصل‌اند. فرض کنید u و v رئوسی باشند که توسط دو مسیر مجزای p_1 و p_2 به هم متصل‌اند (شکل ب – ۵). فرض کنید w رأسی باشد که در آن، مسیرها اول واگرا می‌شوند؛ یعنی، w اولین رأس هم در p_1 و هم p_2 باشد که جانشین آن در p_1 برابر با x و جانشین آن در p_2 برابر با y است که $x \neq y$. فرض کنید z اولین رأسی باشد که در آن، مسیرها دوبار همگرا می‌شوند، یعنی، z اولین رأس از w روی p_1 است که روی p_2 نیز قرار دارد. فرض کنید p' زیرمسیری از p_1 از w به x به z باشد، و فرض کنید p'' زیرمسیری از p_2 از w به y به z باشد. مسیرهای p' و p'' در هیچ رأسی به جز نقاط انتهایی، مشترک نیستند. بنابراین، مسیر حاصل از الحاق p' و معکوس p'' ، یک دور است. این نکته، با فرض درخت‌بودن G تناقض دارد. بنابراین، اگر G درخت باشد، حداکثر یک مسیر ساده می‌تواند بین دو رأس باشد.



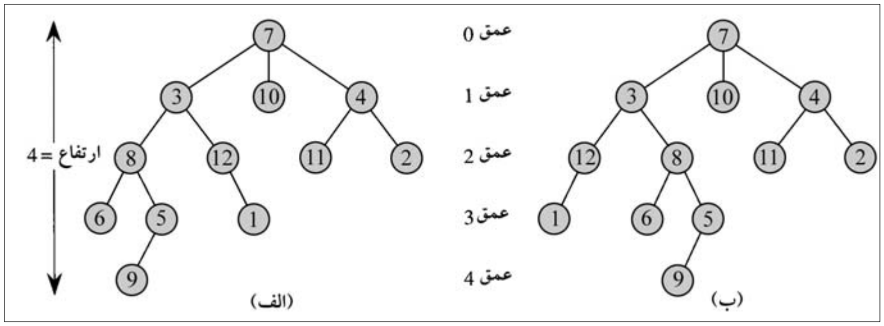
شکل ب -۵ مرحله‌ای از اثبات قضیه ب – ۲: اگر (۱) G درخت آزاد باشد، آنگاه، (۲) هر دو رأس در G توسط مسیر ساده‌ای به هم متصل می‌شوند. برای تناقض فرض کنید که رئوس u و v توسط دو مسیر ساده‌ی مجزای p_1 و p_2 به هم متصل‌اند. این مسیرها ابتدا در رأس w واگرا می‌شوند و سپس ابتدا در رأس z دوباره همگرا می‌شوند. مسیر p' که با معکوس مسیر p'' الحاق شد، دوری را ایجاد می‌کند، که منجر به تناقض می‌شود.

$(2) \Rightarrow (3)$: اگر هر دو رأس در G توسط مسیر ساده‌ی یکتایی به هم متصل شوند، آنگاه G متصل است. فرض کنید (u, v) یالی در E باشد. این یال، مسیری از u به v است و در نتیجه باید مسیر یکتایی از u به v باشد. اگر (u, v) را از G حذف کنیم، مسیری از u به v وجود ندارد، و در نتیجه، حذف آن موجب منفصل‌شدن G می‌شود.

$(3) \Rightarrow (4)$: بنا به فرض، گراف G متصل است و بنا به تمرین ب– ۴–۳ ، داریم $|E| \geq |V|-1$. با استقرا، اثبات خواهیم کرد $|E| \leq |V|-1$. گراف متصل با $n = 1$ یا $n = 2$ رأس، دارای $n-1$ یال است. فرض کنید G دارای $n \geq 3$ رأس است و تمام گراف‌هایی که (۳) را با کمتر از n رأس برآورده می‌کنند، رابطه‌ی $|E| \leq |V|-1$ را نیز برآورده می‌کنند. حذف یال دلخواهی از G ، گراف را به $k \geq 2$ مولفه متصل تقسیم می‌کند (در واقع، $k = 2$). هر مولفه، (۳) را برآورده می‌کند، وگرنه G حالت (۳) را برآورده نمی‌کرد. بنابراین، بنا به استقرا، تعداد یال‌ها در تمام مولفه‌ها عبارت‌است‌از $|V|-k \leq |V|-2$. با اضافه‌کردن یال حذف‌شده، خواهیم داشت $|E| \leq |V|-1$.

$(4) \Rightarrow (5)$: فرض کنید G متصل است و $|E| = |V| - 1$. باید نشان دهیم که G بدون چرخه است. فرض کنید G دارای دوری با k رأس $v_1, v_2, ..., v_k$ است، و بدون از دست دادن کلّیت فرض کنید که این دور ساده است. فرض کنید $G_k = (V_k, E_k)$ زیرگرافی از G باشد که شامل این دور است. توجه کنید که $|V_k| = |E_k| = k$. اگر $k < |V|$، باید رأس $v_{k+1} \in V - V_k$ وجود داشته باشد که همجوار رأس $v_i \in V_k$ است، زیرا G متصل است. فرض کنید $G_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ زیرگراف G باشد، به طوری که $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$ و $E_{k+1} = E_k \cup \{(v_i, v_{k+1})\}$. توجه کنید که $|V_{k+1}| = |E_{k+1}| = k+1$. اگر $k + 1 < |V|$ ، می‌توانیم ادامه دهیم و G_{k+2} را به همین روش تعریف کنیم، و غیره، تا این‌که $G_n = (V_n, E_n)$ را به دست آوریم، که $n = |V|$ ، $V_n = V$ و $|E_n| = |V_n| = |V|$. چون G_n زیرگراف G است، داریم $E_n \subseteq E$، و در نتیجه $|E| \geq |V|$، که با فرض $|E| = |V| - 1$ تناقض دارد. بنابراین، G بدون دور است.

$(5) \Rightarrow (6)$: فرض کنید G بدون دور است و $|E| = |V| - 1$. فرض کنید k تعداد مولفه‌های متصل G است. هر مولفه متصل، بنا به تعریف یک درخت آزاد است، و چون (۱) دلالت بر (۵) می‌کند، مجموع تمام یال‌ها در تمام مولفه‌های متصل G برابر است با $|V| - k$. در نتیجه، باید داشته باشیم $k = 1$ ، و G یک درخت است. چون (۱) بر (۲) دلالت می‌کند، هر دو رأس در G توسط مسیر ساده‌ی یکتایی به هم متصل‌اند. بنابراین، اضافه‌کردن هر یال به G ، دوری را ایجاد خواهد کرد.



شکل ب – ۶ درخت‌های ریشه‌دار و مرتب. (الف) درخت ریشه‌دار با ارتفاع ۴. درخت به روش استاندارد رسم شده است: گره ریشه (۷) در بالا و فرزندان (گره‌هایی با عمق ۱) در زیر آن قرار دارند، فرزندان آن‌ها (گره‌هایی با عمق ۲) در زیر آن‌ها قرار دارند، و غیره. اگر درخت مرتب باشد، ترتیب نسبی چپ به راست فرزندان مهم است، وگرنه مهم نیست. (ب) درخت ریشه‌دار دیگر. به عنوان درخت ریشه‌دار، این درخت مانند درخت در قسمت (الف) است، ولی به عنوان درخت مرتب، متفاوت از آن است، زیرا فرزندان گره ۳ به ترتیب متفاوتی ظاهر می‌شود.

$(6) \Rightarrow (1)$: فرض کنید G بدون دور است، ولی اگر هر یالی به E اضافه شود، دوری ایجاد می‌گردد. باید نشان دهیم که G متصل است. فرض کنید u و v رئوس دلخواهی در G باشند. اگر u و v قبلاً همجوار نبودند، اضافه‌کردن یال (u, v) ، دوری را ایجاد می‌کند که در آن تمام یال‌ها به جز (u, v) به G تعلق دارند. بنابراین، مسیری از u به v وجود دارد، و چون u و v به طور دلخواه انتخاب‌شده بودند، G متصل است. ■

ب– ۵–۲ درخت‌های ریشه‌دار و مرتب

درخت ریشه‌دار[1]، درخت آزادی است که در آن یکی از رئوس، از بقیه متمایز است و **ریشه** نام دارد. معمولاً رأس درخت ریشه‌دار را **گره** درخت می‌نامیم. شکل ب – ۶ (الف) درخت ریشه‌دار را روی مجموعه‌ای از ۱۲ گره با ریشه ۷ نشان می‌دهد.

گره x را در درخت ریشه‌دار T با ریشه r درنظربگیرید. هر گره y روی مسیر یکتایی از r به x ، **جدّ**[2] x نام دارد. اگر y جدّ x باشد، آنگاه x **نسل**[3] y است (هر گره، جدّ و نسل خودش است). اگر y جد x و $x \neq y$ ، y **جد محض** x و x **نسل محض** y است. **زیردرختی با ریشه x** ، درختی است که توسط نسل x با ریشه‌ی x به دست آمده است. به عنوان مثال، زیردرختی با ریشه ۸ در شکل ب – ۶ (الف)، شامل گره‌های ۸، ۶، ۵ و ۹ است.

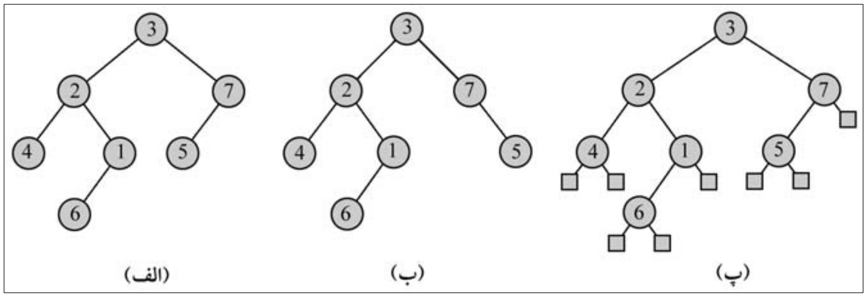
اگر یال آخر در مسیری از ریشه r درخت T به گره x ، برابر با (y, x) باشد، آنگاه y **والد** x ، و x **فرزند** y است. ریشه در T ، تنها گره‌ای است که والد ندارد. اگر دو گره، والد یکسانی داشته باشند، **همزاد** هستند. گره فاقد فرزند، **گره خارجی** یا **برگ** نام دارد. گره غیر برگ را **گره داخلی** می‌گویند.

تعداد فرزندان گره x در درخت ریشه‌دار T ، **درجه** آن نام دارد[4]. طول مسیر از ریشه r به گره x ، **عمق**[5] x در T نام دارد. ارتفاع گره در درخت، تعداد یال‌ها در طویل‌ترین مسیر ساده از آن گره به برگ است، و ارتفاع درخت، برابر با ارتفاع ریشه است. ارتفاع درخت، برابر با بزرگ‌ترین عمق هر گره در درخت است.

---
1. rooted tree 2. ancestor 3. descendant

۴. توجه کنید که درجه گره بستگی به این دارد که T ریشه‌دار یا درخت آزاد باشد. درجه رأس در درخت آزاد، همانند هر گراف بدون جهت، برابر با تعداد رئوس همجوار است. در درخت ریشه‌دار، درجه برابر با تعداد فرزندان است. والد گره فاقد درجه است.

5. depth



شکل ب – ۷ درخت‌های دودویی. (الف) درخت دودویی که به روش استاندارد رسم شد. فرزند چپ گره در زیر گره و در سمت چپ آن رسم شد. فرزند راست در زیر گره و در سمت راست آن رسم شد. (ب) درخت دودویی متفاوت از (الف). در (الف)، فرزند چپ گره ۷، برابر ۵ است، و فرزند راست ندارد. در (ب)، فرزند چپ گره ۷ وجود ندارد و فرزند راست آن ۵ است. به عنوان درخت‌های مرتب، این دو درخت یکسان هستند، اما به عنوان درخت‌های دودویی، متفاوت‌اند. (پ) درخت دودویی در (الف) توسط گره‌های داخلی مربوط به درخت دودویی پُر[1] نشان داده شده است: درخت مرتبی که در آن هر گره داخلی دارای درجه ۲ است. برگ‌ها در این درخت، به صورت مربع نشان داده شدند.

درخت مرتب، درخت ریشه‌داری است که در آن، فرزندان هر گره مرتب‌اند. یعنی، اگر گره‌ای k فرزند دارد، آنگاه فرزند اول، فرزند دوم، ... و فرزند k اُم وجود دارند. دو درخت در شکل ب – ۶، وقتی مرتب در نظر گرفته شدند، متفاوت‌اند، اما وقتی فقط درخت ریشه‌دار در نظر گرفته می‌شوند، یکسان هستند.

ب–۵–۳ درخت‌های دودویی و مکانی (موضعی)

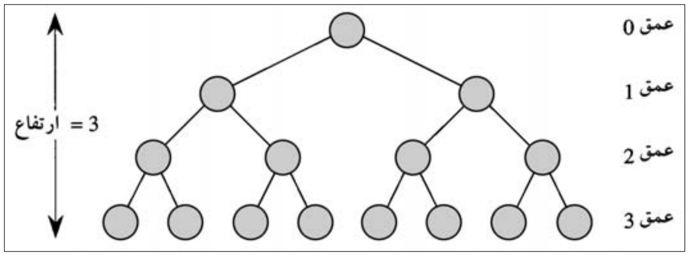
درخت‌های دودویی به طور بازگشتی تعریف می‌شوند. **درخت دودویی T** ، ساختاری است که روی مجموعه متناهی تعریف می‌شود، به طوری که:

- خالی است (فاقد گره است)، یا
- مجموعه‌ای از گره‌های مجزا است: گره ریشه، درخت دودویی به نام **زیردرخت چپ**، و درخت دودویی به نام **زیردرخت راست**.

درخت دودویی که فاقد گره است، **درخت تهی** یا **درخت خالی** نام دارد و گاهی با NIL نشان داده می‌شود. اگر زیردرخت چپ خالی نباشد، ریشه آن فرزند چپ ریشه کل درخت است. به طور مشابه، ریشه زیردرخت راستِ غیرتهی، فرزند راست ریشه کل درخت نام دارد. اگر زیردرختی تهی باشد، می‌گوییم فرزند وجود ندارد. شکل ب – ۷ (الف) یک درخت دودویی را نشان می‌دهد.

درخت دودویی، فقط درخت مرتبی نیست که در آن، حداکثر درجه هر گره ۲ است. برای مثال، در درخت دودویی، اگر گره‌ای فقط یک فرزند داشته باشد، مکان فرزند – چه فرزند چپ باشد و چه فرزند راست – مهم است. در درخت مرتب، مهم نیست که فرزند خاصی، فرزند چپ یا راست باشد. شکل ب – ۷ (ب) یک درخت دودویی را نشان می‌دهد که متفاوت از درخت شکل ب – ۷ (الف) است، زیرا مکان یک گره فرق می‌کند. به عنوان درخت‌های مرتب، این دو درخت یکسان هستند.

1. full binary tree



شکل ب – ۸ درخت دودویی کامل به ارتفاع ۳ با ۸ برگ و ۷ گره داخلی.

اطلاعات مربوط به مکان گره‌ها در درخت دودویی، می‌تواند توسط گره‌های داخلی درخت مرتب نمایش داده شود، که در شکل ب – ۷ (پ) آمده است. ایده، جایگزینی هر فرزند غایب در درخت دودویی با گره فاقد فرزند است. این گره‌های برگ، در شکل به صورت مربع نشان داده شدند. درخت حاصل، **درخت دودویی پُر** است: هر گره، یا برگ است یا دقیقاً درجه ۲ دارد. گره‌ای با درجه ۱ وجود ندارد. در نتیجه، ترتیب فرزندان گره، اطلاعات مربوط به مکان گره‌ها را نگه می‌دارد.

اطلاعات مربوط به مکان گره‌ها که درخت‌های دودویی را از درخت‌های مرتب متمایز می‌کند، می‌تواند به درخت‌هایی با بیش از ۲ فرزند در هر گره بسط داده شود. در **درخت مکانی**[1] **(موضعی)**، فرزندان یک گره، با اعداد صحیح متفاوتی برچسب‌گذاری می‌شوند. اگر هیچ فرزندی با برچسب عدد صحیح i مشخص نشده باشد، به معنای این‌است‌که فرزند i اُم گره وجود ندارد. **درخت k تایی**، یک درخت مکانی است که در آن برای هر گره، تمام فرزندان با برچسب‌های بزرگ‌تر از k ، وجود ندارند. بنابراین، درخت دودویی، درخت k تایی با $k = 2$ است.

درخت k تایی کامل[2]، یک درخت k تایی است که در آن تمام برگ‌ها عمق یکسانی دارند و تمام گره‌های داخلی درجه k دارند. شکل ب – ۸ یک درخت دودویی کامل با ارتفاع ۳ را نشان می‌دهد. درخت k تایی کامل به ارتفاع h ، چند برگ دارد؟ ریشه دارای k فرزند در عمق ۱ است، که هر کدام k فرزند در عمق ۲ دارند، و غیره. بنابراین، تعداد برگ‌ها در عمق h ، برابر با k^h است. در نتیجه، ارتفاع درخت k تایی کامل با n برگ، برابر با $\lg_k n$ است. تعداد گره‌های داخلی درخت k تایی کامل با ارتفاع h ، بنا به معادله (الف – ۵) برابر است با:

$$\begin{aligned} 1 + k + k^2 + \cdots + k^{h-1} &= \sum_{i=0}^{h-1} k^i \\ &= \frac{k^h - 1}{k - 1} \end{aligned}$$

بنابراین، درخت دودویی کامل دارای $2^h - 1$ گره داخلی است.

تمرین‌های بخش ب – ۵

تمرین ب–۵–۱: تمام درخت‌های آزاد مرکب از ۳ رأس A ، B و C را رسم کنید. تمام درخت‌های ریشه‌دار با گره‌های A ، B و C که A ریشه باشد را رسم کنید. تمام درخت‌های مرتب با گره‌های A ، B ، C با ریشه A را رسم کنید. تمام درخت‌های دودویی با گره‌های A ، B ، C ، با ریشه A را رسم کنید.

1. positional tree 2. complete k-ary tree

تمرین ب–۵–۲: فرض کنید $G = (V, E)$ گراف بدون دور جهت‌داری باشد که در آن رأس $v_0 \in V$ وجود دارد که مسیر یکتایی از v_0 به هر رأس $v \in V$ وجود دارد. ثابت کنید نسخه‌ی بدون جهت G، یک درخت است.

تمرین ب–۵–۳: با استقرا نشان دهید که تعداد گره‌هایی با درجه ۲ در هر درخت دودویی غیرتهی، یکی کمتر از تعداد برگ‌ها است.

تمرین ب–۵–۴: با استقرا نشان دهید که درخت دودویی غیرخالی با n گره، دارای حداقل ارتفاع $\lfloor \lg n \rfloor$ است.

★ **تمرین ب–۵–۵:** **طول مسیر داخلی** درخت دودویی کامل، برابر با مجموع ارتفاع هر گره داخلی است. به طور مشابه، **طول مسیر خارجی** برابر با مجموع ارتفاع تمام گره‌های برگ است. یک درخت دودویی کامل با n گره داخلی، طول مسیر داخلی i، و طول مسیر خارجی e را درنظربگیرید. ثابت کنید $e = i + 2n$.

★ **تمرین ب–۵–۶:** فرض کنید وزن $w(x) = 2^{-d}$ را برای هر برگ به عمق d در درخت دودویی T درنظربگیریم. ثابت کنید $\sum_x w(x) \le 1$، که مجموع روی تمام برگ‌های x در T انجام شده است (این نامعادله را نامعادله Kraft می‌گویند).

★ **تمرین ب–۵–۷:** نشان دهید که اگر $L \ge 2$، آنگاه هر درخت دودویی با L برگ شامل زیردرختی است که از $L/3$ تا $2L/3$ برگ دارد.

ب–۶ مسئله‌ها

مسئله ب–۱: رنگ‌آمیزی گراف.

با توجه به گراف بدون جهت $G = (V, E)$، رنگ‌آمیزی – k گراف G، تابع $c : V \to \{0,1,\ldots,k-1\}$ است به طوری که، برای هر یال $u, v \in E$، داریم، $c(u) \ne c(v)$. به عبارت دیگر، اعداد $0, 1, \ldots, k-1$ نشان‌دهنده‌ی k رنگ هستند و رئوس همجوار باید رنگ‌های متفاوتی داشته باشند.

الف. نشان دهید هر درخت می‌تواند با دو رنگ، رنگ‌آمیزی شود.

ب. نشان دهید که موارد زیر معادل‌اند:

۱. G دوبخشی است.

۲. G با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی است.

۳. G فاقد دورهایی به طول فرد است.

پ. فرض کنید d ماکزیمم درجه هر رأس در گراف G باشد. ثابت کنید G می‌تواند با $d + 1$ رنگ، رنگ‌آمیزی شود.

ت. نشان دهید که اگر G دارای $O(|V|)$ یال باشد، آنگاه G می‌تواند با $O(\sqrt{|V|})$ رنگ، رنگ‌آمیزی شود.

مسئله ب–۲: گراف‌های دوست.

هر یک از گزاره‌های زیر را به عنوان یک قضیه درباره گراف‌های بدون جهت بیان کرده سپس آن را اثبات کنید. فرض کنید دوست‌بودن، متقارن است ولی انعکاسی نیست.

الف. در هر گروه با $n \ge 2$ نفر، دو نفر در گروه وجود دارند که تعداد دوستان یکسانی دارند.

ب. هر گروه ۶ نفری، شامل سه دوست متقابل یا سه غریبه‌ی متقابل است.

پ. هر گروه از افراد می‌توانند به دو زیرگروه تقسیم شوند، به طوری که حداقل نیمی از دوستان هر نفر، به زیرگروهی تعلق دارد که آن فرد، عضو آن گروه نیست.

ت. اگر هر فرد در گروه، دوست حداقل نیمی از افراد آن گروه باشد، آنگاه گروه می‌تواند حول میزی بنشیند که هر نفر بین دو دوست قرار می‌گیرد.

مسئله ب-۳: درخت‌های دوبخشی.

در بسیاری از الگوریتم‌های تقسیم و حل که روی گراف‌ها کار می‌کنند، لازم است گراف به دو بخش با اندازه تقریباً یکسان تقسیم شود، که در اثر افراز رئوس به دست می‌آید. این مسئله، درخت‌های دوبخشی را بررسی می‌کند که در اثر حذف تعداد کمی از یال‌ها به دست می‌آید. لازم است هر وقت که دو رأس که پس از حذف یال‌ها در یک زیردرخت قرار گرفتند، در یک افراز قرار داشته باشند.

الف. نشان دهید که با حذف یک یال، می‌توان رئوس در درخت دودویی k رأسی را به دو مجموعه A و B تقسیم کرد، به طوری که $|A| \le 3n/4$ و $|B| \le 3n/4$.

ب. نشان دهید که ثابت $3/4$ در قسمت (الف) در بدترین حالت، بهینه است. برای این کار مثالی از درخت دودویی ساده ارائه دهید که در متوازن‌ترین افراز آن پس از حذف یک یال، داریم $|A| = 3n/4$.

پ. نشان دهید که با حذف حداکثر $O(\lg n)$ یال، می‌توان رئوس یک درخت دودویی n رأسی را به دو مجموعه A و B افراز کرد، به طوری که $|A| = \lfloor n/2 \rfloor$ و $|B| = \lceil n/2 \rceil$.